akhosropanah@yahoo.com
khosropanah.ir
mhekmat.ir

فلسفه ریاضی

بسم الله الرحمن الرحیم

---

۱. مقدمه

ریاضیات یکی از قدیمی ترین علوم بشری است. بابلیان در حساب و جبر پیشرفت زیادی داشتند. مصریان نیز در هندسه به قواعد بسیاری دست یافته بودند. هندیها نیز در حساب و جبر بسیار پیشرفته بودند. نوبت که به یونانیان رسید؛ ریاضیات به قدر کافی فربه شده بود تا آنان را به پژوهشهای فلسفی پیرامون آن ترغیب کند. فیثاغورثیان گونه ای فلسفه دینی برای ریاضیات ساختند و طالس نیز به استحکام روش استدلال قیاسی برای ریاضی پرداخت.افلاطون نیز به نگرش فلسفی به ریاضیات عمق بخشید. در دوره شکوفایی علوم اسلامی به ریاضیات حکمت وسطی و نیز تعلیمیات نیز می گفتند و آن را چهار بخش می دانستند: حساب، هندسه، هیئت، موسیقی. دو علم اول را ریاضیات محضه می نامیدند. امروزه دو علم هیئت و موسیقی از شاخه های فیزیک به شمار می روند و اگر بخواهیم همچون گذشتگان این دو را از شاخه های ریاضی به حساب آوریم؛ همه فیزیک باید شاخه ریاضی به حساب آید. با توسعه مکتب تجربه گرایی در غرب، از یک طرف و پیدایش هندسه های نااقلیدسی از طرف دیگر، در حالی که ریاضیات زبان علم برتر زمان، فیزیک، قرار گرفته بود؛ پژوهش های فلسفی درباره ریاضیات به ناگهان توسعه بسیاری یافت. این در حالی است که چند سه قرن اخیر هم پژوهش های ریاضی در ایران فراموش شده است و هم پژوهش های فلسفی در باره ریاضی. در این مقاله سعی می کنم به گونه ای مقدماتی فلسفه ریاضی معرفی کنم و نگاهی اجمالی نیز به آرای فلاسفه اسلامی در این باره داشته باشم؛ باشد که مفتاحی برای گسترش اینگونه پژوهش ها گردد.

---

۲. عقلانیت معرفت ریاضی

۲.۱. معناداری مفاهیم و گزاره های ریاضی

آیا وقتی ریاضیدان می گوید: ۲=۱+۱ تنها با تعدادی علامت بازی می کند یا اینکه معنای خاصی از آن در نظر دارد و در صدد ابراز آن معنا است؟ تعدادی از ریاضیدانان و در رأس آنان هیلبرتHilbert برآنند که فرمولهای ریاضی تنها نماد هاییsymbols اند که با قواعدی صوریformal rules کنار هم چیده می شوند. برای نمونه گودمانGodement می نویسد:

سرانجام این عقیده حاصل شد که آنچه در ریاضیات مهم است فقط نمادهایی هستند که با رعایت «قوانین» صریحی برای تشکیل اشیاء ریاضی و روابط به کار می روند.

این عقیده با نام صورتگرایی formalism شناخته می شود. مور این عقیده را به عنوان یکی از دیدگاه های ناواقع گرایانهantirealistic در فلسفه ریاضی philosophy of mathematics معرفی می کند و بارکر Barker نیز آن را یک دیدگاه غیر جزمی در باب نظریه اعداد می شمارد و بر طبق این نگرش، ریاضی را هم چون شطرنج یک بازی فکری به حساب می آورد که البته از شطرنج پیچیده تر است و چون قواعد ریاضی ، بر خلاف شطرنج، با فعالیت های عملی هماهنگ شده است، می تواند کاربردهای عملی داشته باشد. دیویی Dewey، فیلسوف پراگماتیست نیز از این نظر دفاع می کند . اگر چه این نظر در میان ریاضیدانان با استقبال روبرو شده است ـ حد اقل در دانشکده های ریاضی ایران بسیار مورد توجه قرار گرفته است ـ اما با مشکلاتی اساسی روبرو است.

اگر ریاضی صرفاً بازی قاعده مندی با تعدادی از نمادهای بی معنا است، در این صورت این یک معجزه است که این همه در فیزیک برای حل مسایل طبیعی نه تنها قابل به کارگیری است؛ بلکه اساسا

اغماض پذیر نیست. چنین کارآمدی گسترده و عمیقی نمی تواند اتفاقی باشد و با قول بـه بـی معنایی مفاهیم ریاضی قابل توجیه نیست.

هم چنین در عمل، خود ریاضیدانان به معنا داری گزاره های خود توجه دارند:

لازم است تأکید نمایم که این دسـتگاه هـای جبـری و اصـول موضـوع معـرف آنهـا دارای حالـت طبیعـی مشخصی باشند. آنها باید حاصل توجه به مثالهای بیشماری باشـند؛ یعنی از آنها نتایج بامعنی بسـیاری بارور گردند. نمی شود همین طوری چند اصل موضوع ساخت و سپس بـه بررسـی نتـایج حاصـل از آنهـا پرداخت. البته، عده ای این کار را کرده اند؛ امـا اکثـر ریاضـیدانان ایـن گونـه اعمـال ریاضـیاتی را کـم مایه شمرده، آن را رد می کنند.

اگر اصول موضوعه دستگاه های ریاضی بی معنا یند؛ چرا در باره آنها چـون و چـرا مـی شـود و نظرهـای مخالف و موافق عرضه می گردد؟ گرینبرگ نیز بی معنا خواندن گزاره های ریاضی نقـد مـی کنـد و بـر آن است که ریاضیدانان اصول موضوعه را به دلخواه نمی سازند. کورانت Courant و رابینز Robbins نیز مـی نویسند:

در این تصدیق که ریاضیات چیزی نیست جز دستگاهی از نتـایج ناشـی از تعـاریف و از اصـولی کـه بایـد باهم سازگار باشند، خطری بزرگ برای نقش علم نهفته اسـت. اگـر ایـن توصـیف درسـت بـود، ریاضـیات نمی توانست توجه هیچ هوشمندی را به خود جلب کند. بازی ای بـود بـا تعـاریف، قواعـد و قیـاس هـای منطقی، بی انگیزه ای یا هدفی .

به نظر می رسد بی معنا دانسـتن مفـاهیم ریاضـی نتیجـه سـیطره نـام هیلبـرت بـر ریاضـیدانان و تجربـه گرایـی از نـوع پوزیتیویسـم منطقـی و نیـز نـاتوانی از حـل مشـکل اثبـات سـازگاری دسـتگاه هـای اصـل موضوعی ریاضی است. مکتب فلسفی پوزیتیویسم منطقی اگر چه از جهت مبانی، مکتبـی بسـیار کـم مایه بود و اکنون دیگر از این جهت مکتبی شکست خورده محسـوب مـی شـود؛ امـا در کتابهـای علمـی هنوز آثـار نـامطلوب آن وجـود دارد. بعیـد نیسـت کـه دیـدگاه صـورت گرایانـه در حقیقـت راهـی بـرای کنـار گذاشتن مسئله دشوار فلسفی حقیقت و معرفت ریاضی است.

۲.۲. منشأ انتزاع مفاهیم ریاضی

اگر مفاهیم ریاضی، مفاهیمی معنادار هستند؛ در این صورت مسئله منشأ انتزاع آنها مطرح می شود. در این مسئله به آرای گوناگونی بر می خوریم که به دو دسته عین گرایانه و ذهـن گرایانـه تقسـیم پذیر است. عین گرا منشأ انتزاع مفاهیم ریاضی را واقعیت عینی می داند؛ در حالی که از دیـدگاه رقیـب ایـن منشأ ذهن است.

از مهمترین نظریه های ذهن گرایانه در این باره نظریه کانت Kant است که وحدت و کثرت، و نیـز فضـا و زمان را قالب های ذهن محسوب می کند که عین باید با آن منطبق شود.

هندسه که شعبه خاصی از ریاضیات است، به نحو پیشـینی طـرح و ترسـیم مـی گـردد. بـا ایـن حـال، خوب می دانیم که قضایای آن ضروری اسـت؛ بـه ایـن معنـی کـه واقعیـت تجربـی بایـد همیشـه بـا آنهـا منطبق باشد. عالِم هندسه خواص مکانی را به نحو پیشـینی تعیـین مـی کنـد و قضـایای او همیشـه در مورد مرتبه مکانی تجربی صادق است. اما او چگونه می تواند إخبار پیشینی ضرورتاً صادق بدهـد کـه بـا رجوع به عالَم تجربی خارج دارای اعتبار باشد؟ فقط در صورتی می تواند این کـار را بکنـد کـه مکـانی کـه خواص آن را تعیین می نماید، صورت محض احساس بشری باشد که آن صورت، اعیان به ذهن ما عرضـه می شوند و فقط به پدیدارها اطلاق می شود؛ نه به اشیای فی نفسه. هر گاه این نحوه تبیـین را قبـول کنیم «به آسانی می فهمیم که کلیه متعلقات خارجی عالَم محسـوس ضـرورتاً و دقیقـاً بایـد بـا قضـایای هندسه مطابق باشد».

نظریه ذهن گرایانه مهم دیگر از آن راسل Russel است که به نوعی با تأثر از فرگه frege است. راسل می نویسد:

هیچ عددی حتی واحد (یک) بر اشیای مادی خارجی اطلاق نمی شود و اطلاق آن محدود به امور کلی یا وصفی است؛ مثل «انسان»، «قمر کره زمین»، «قمر کره زهره». ... اما به جای آن که عنوان و مفهوم کلی «انسان» را موضوع قضایای عددی، یعنی قضایایی که محمول آنها عدد است، قرار دهیم؛ می توانیم بدون این که تغییر مهمی داده باشیم، طبقه یا مجموعه امور را موضوع قرار دهیم؛ یعنی در مثال به جای آن که بگوییم «انسان»، بگوییم «افراد انسانی»؛ و آن را طبقه ای بدانیم که عنوان کلی انسان بر آن اطلاق می گردد. در این صورت دو عنوان کلی «انسان» و «حیوان دو پای پوست صاف» بر مجموعه واحدی از اعیان اطلاق می شود و دارای همان مصادیق است.

راسل سپس مجموعه های هم توان را مجموعه هایی تعریف می کند که نسبت یک به یک میان فرد فرد اجزای یک مجموعه و فرد فرد اجزای مجموعه دیگر برقرار باشد ؛ و بر این اساس عدد را چنین تعریف می کند:

عده اجزا یا افراد هر طبقه ای عبارت است از طبقه حاوی تمام طبقاتی که مشابه [هم توان] با طبقه مورد تعریف هستند. (داخل کروشه از من است) .

تا اینجا راسل با فرگه هم سخن است. ولی در اینجا راسل بر آن می شود که طبقه تنها یک اعتبار است و واقعیتی به ازای آن

اگر این نظر را قبول کنیم که طبقات «علایم» اشیا است؛ لازم می آید که اعداد هم اشیا و امور واقعی نباشند و قضایایی که در آن لفظ عدد به کار رفته، در حقیقت دارای مقوماتی نیست که به ازای عدد باشد و فقط دارای یک صورت منطقی است که خود آن صورت جزء قضیه حاوی صورت مزبور نیست.

فیثاغورثیان به عینیت عدد قایل بودند و شیء و عدد را یکی می گرفتند و عدد را اصل و منشأ همه چیز می دانستند . فرگه نیز در همان جا که راسل از او جدا می شود؛ نظریه ای افلاطونی می دهد. به نظر او طبقات در عالمی ماورای عالم ذهن و عالم ماده در عالمی وجود مجرد دارند.

در آرای فلاسفه اسلامی در منشأ انتزاع عدد ـ پایه ای ترین مفهوم ریاضی ـ با دو نظر به ظاهر معارض روبرو می شویم. مفهوم کمّ در نظر این فلاسفه از مفاهیم ماهوی محسوب می شود و در این صورت منشأ انتزاع آن حد اشیا است. اما دو مفهوم وحدت و کثرت از مفاهیم فلسفی به حساب می آیند و منشأ انتزاع آنها حاق وجود اشیا است. بنا بر این، این فلاسفه در این مسئله عین گرایند. البته اگر به دوگانگی حساب و هندسه توجه کنیم؛ به راحتی این تعارض برطرف می شود؛ اگر چه فلاسفه اسلامی، حتی متأخران آنان نیز بعید به نظر می رسد از این دوگانگی آگاه بوده یا در صورت اطلاع اجمالی، در این رأی فلسفی به آن توجه کرده باشند. ریاضیات دو بخش اصلی دارد: حساب و هندسه. حساب علمی بی رقیب است و به هر حال در انطباق احکام آن نظیر ۱=۱+۰ و ۲=۱+۱ بر خارج نمی توان خدشه کرد. اما هندسه علمی است که رقیب دارد و در برابر هندسه اقلیدسی، هندسه های غیر اقلیدسی را می یابیم و نیز در برابر هندسه های سه بعدی با هندسه های چهار بعدی و بیشتر روبرو می شویم. این که کدام هندسه، هندسه عالم خارج است، در ریاضیات قابل حکم نیست و به تحقیق تجربی نیازمند است. به ویژه که ثابت شده است هندسه اقلیدسی و نااقلیدسی لُباچفسکی از حیث سازگاری منطقی هم ارزند؛ به عبارت دیگر، اگر در اصول موضوعه هندسه اقلیدسی تناقضی نباشد، در اصول موضوعه هندسه لباچفسکی نیز تناقضی نیست؛ به تعبیر دیگر اصل پنجم اقلیدس از اصول دیگر مستقل است . اثبات هم ارزی منطقی هندسه های سه بعدی و چهار بعدی یا بیشتر نیز چندان مشکل نیست. بنابر این می توان توجیه معرفت شناسانه مناسبی برای دوگانه فرض کردن مفاهیم

ریاضی داشت. مفاهیم حساب از مفاهیم فلسفی بوده و نظیر مفهوم «وجود»اند. اما محمولات دیگر ریاضی عارض بر وجود بما هو وجود نیستند؛ بلکه عارض بر وجود از آن حیث که خواص کمّی یافته است، هستند و بنابر این سنخ دیگری از مفاهیم اند. البته شاید این نکته در نهایت به اینجا برسد که علم حساب به فلسفه تحویل گردد.

۲.۳. سنخ شناسی مفاهیم ریاضی

درباره سنخ مفاهیم ریاضی آرای بسیاری از فلاسفه دیده می شود و هر فیلسوفی به حسب مبانی خود در باره سنخ شناسی مفاهیم نظری در این باره داده است. برای مثال، از نظر دکارت وضوح و تمایز مفهوم مهم بود و او مفاهیم ریاضی را از این حیث واضح و متمایز می خواند. در نظر کانت دو جفت ویژگی مفاهیم مهم بود: پیشینی یا پسینی بودن آنها و تألیفی یا تحلیلی بودن آنها. کانت، خود در نهایت نظر می دهد که مفاهیم ریاضی پیشینی تألیفی اند.

جان لاک مفاهیم را به تصورات بسیط و مرکب، و تصورات مرکب را به حالات، جواهر، و نسبتها تقسیم می کند و بر آن است که حالات نیز دو گونه اند: حالات بسیط و حالات مرکب. از دید لاک عدد از حالات بسیط است . وی هم چنین توان شیء در فرا آوردن تصور در ذهن را کیفیت می خواند و آن را به دو قسم کیفیت اولیه و ثانویه تقسیم می کند. کیفیات اولیه در خود اجسام وجود دارند؛ ولی کیفیات ثانویه در خود اجسام وجود ندارند، بلکه اجسام تنها توان فرآوری احساس آن را در ما دارند. از دید لاک محمولات ریاضی مانند عدد و شکل از نوع کیفیات اولیه اند.

راسل و فرگه نیز تلاش دارند مفاهیم ریاضی را به مفاهیم منطقی تحویل نمایند؛ چنان که در بحث منشأ انتزاع مفاهیم ریاضی گذشت.

از دیدگاه فلاسفه اسلامی مفاهیم ریاضی، مفاهیم کلی و معقول اند. این فلاسفه مفاهیم کلی را به سه قسم تقسیم می کنند: ماهوی یا معقول اولی، فلسفی یا معقول ثانی فلسفی، و منطقی یا معقول ثانی منطقی. مفهوم وحدت و کثرت از دید آنان از سنخ مفاهیم فلسفی و مفهوم کمّ از سنخ مفهوم ماهوی است. البته برخی از فلاسفه معاصر نوصدرایی، مانند علامه مصباح یزدی، همه مفاهیم ریاضی را معقول ثانی فلسفی می دانند.

۲.٤. واقع نمایی گزاره های ریاضی

در باب واقع نمایی گزاره های ریاضی realism in mathematical proposition با دو گونه نگرش روبروییم: نگرش های ناواقع گرا antirealist و نگرش های واقع گرا. نگرش های واقع گرا گزاره های ریاضی را اکیداً صدق و کذب پذیر می دانند و قایلند که حقیقتی است که این گزاره ها از آن حقیقت خبر می دهند و آن را حقیقت ریاضی mathematical realism می نامند. بنا بر این نگرش کار ریاضیدان کشف این حقیقت است، نه اختراع یا اعتبار آن. فیثاغورثیان، افلاطون، فلاسفه اسلامی، دکارت، فرگه، گودل و نیز بسیاری از ریاضیدانان این نگرش را پذیرفته اند.

افلاطونی گرایی Platonism یکی از قدیمی ترین گرایش های واقع گرا در فلسفه ریاضی است. فرگه از برجسته ترین افلاطونیان متأخر در غرب شناخته می شود. بنابر این نظر ریاضیات مطالعه مجموعه ای از اعیان ریاضی mathematical objects به گونه متمایز، مانند اعداد، توابع، مجموعه ها، خطوط و غیره است که از ما مستقل اند.

افلاطونی گرایی بیان ریاضی را در ارزش ظاهریface value آن می گیرد: ادعای «یک عدد اول بین هفت و دوازده وجود دارد» به صراحت یک ادعای وجودی است. و ادعای «نُه از هفت بزرگتر است» مقایسه میان دو عین است.بنابر بیان افلاطونی گرا، اعیان ریاضی مجرد اند؛ آنها در مکان یا زمان جای نگرفته اند. آنها پایدار immutable و سرمدی eternalاند و این سرّ تغییر ناپذیری حقیقت ریاضی است.

نسبت آنها با یکدیگر ضروری و ثابت است: مثلاً این واقعیت که نه از هفت بزرگتر است، تصادفی نیست؛ بلکه جزیی از طبیعتِ نظامِ اعداد طبیعی The nature of the system of natural numbers است.

فلاسفه اسلامی اگر چه در باب فلسفه ریاضی چندان سخن نگفته اند، اما این بدان جهت نیست که آنان به این موضوع علاقه نداشته اند یا آن را معرفت محسوب نمی کردند؛ بلکه به این جهت است که آن را قطعی و یقینی برای همگان محسوب می کردند و امکان خطا در آن را بعید می دانستند. البته منظور از ریاضیات در اینجا آن چیزی است که مسلمانان با عنوان ریاضیات محضه می شناختند که در آن زمان فقط شامل حساب و هندسه می شد؛ نه همه ریاضیات که به نظر آنان علاوه بر آن دو شامل هیئت و موسیقی نیز می گشت؛ زیرا واقع نمایی گزاره های هیئت و موسیقی ـ که امروزه جزء ریاضیات محسوب نمی شوند ـ در این مقام مورد خدشه نیست.

گودل نیز به واقع نمایی ریاضی عمیقاً اعتقاد داشت:

معهذا، به هیچ وجه نتیجه نمی شود که داده های این نوع دوم (شهودهای ریاضی) به سبب آن که نمی توانند با اثر برخی چیزها بر روی اعضای حواس ما تداعی شوند، چنان که کانت مدعی است، چیزهای ذهنی محض باشند. اما چون در نقطه مقابل احساسات قرار گرفته اند، حضورشان به علت نوع دیگری از وابستگی بین ما و واقعیت باشد.

توجه شود که از دید گودل منبع معرفت ریاضی شهود ریاضی است. اچ. هاردی نیز بر آن است که:

برای من و فکر می کنم برای بیشتر ریاضیدانان، واقعیت دیگری وجود دارد که من آن را «واقعیت ریاضی» می نامم. مابین ریاضیدانان یا فلاسفه هیچ گونه بحثی درباره ماهیت واقعیت ریاضی نیست... کسی که بتواند توضیح قانع کننده ای از واقعیت ریاضی بدهد به حل بسیاری از مسایل ماورای طبیعی دست خواهد یافت... من عقیده دارم که واقعیت ریاضی بیرون از وجود ما است و وظیفه ما کشف یا مشاهده آن است؛ و قضایایی را که اثبات می کنیم و با آب و تاب به عنوان «ابداعات» خود درباره آنها داد سخن می دهیم، اساساً حاشیه ای بر مشاهدات ما هستند. بسیاری از فیلسوفان مشهور جهان از افلاطون به این طرف، به صورتی چنین نظری داشته اند.

مطالعه این چند سطر از ژان دیودونه جالب توجه است:

ما در اساس به واقعیت ریاضی معتقدیم؛ ولی هنگامی که فلاسفه با تمسک به باطلنماهای خود ما را مورد حمله قرار می دهند، شتابان خود را در پس صورت گرایی پنهان می کنیم و می گوییم «ریاضیات فقط ترکیبی از نمادهای بی معنی است» و آن وقت فصلهای اول و دوم نظریه مجموعه ها را پیش می کشیم. بالاخره ما را به حال خود می گذارند و ما با آن احساسی که هر ریاضیدان دارد و می اندیشد که با یک چیز واقعی سر و کار دارد، به ریاضیات باز می گردیم؛ همان کاری که همواره کرده ایم.

مور هفت گونه ناواقعگرایی در فلسفه ریاضی را بر می شمرد. به جز صورتگرایی که اساساً گزاره های ریاضی را بی معنا می انگارد، با گونه هایی دیگر از نگرش ناواقعگرا درباره گزاره های ریاضی روبروییم. از مهمترین آنها نگرش کانت است. کانت اگر چه گزاره های ریاضی را تألیفی می داند، اما از طرف دیگر آنها را پیشینی به حساب می آورد. پیشینی بودن یک گزاره در نزد کانت مفهوم خاصی دارد. به نظر او گزاره های پیش از تجربه گزاره های حاکی از یک واقعیت خارجی نیستند؛ بلکه گزاره هایی اند که از ساختار ذهن حکایت می کنند؛ ساختاری که واقعیت خارجی جز در قالب آن ساختار مشاهده پذیر نیست.

برای آن که شهود من، بر وجود واقعی شیء تقدم داشته باشد و به صورت شناخت مقدم بر تجربه در آید، تنها یک وجه از وجود دارد و آن این است که آن شهود شامل امری جز صورت حساسیت نباشد،

صورتی که در من به عنوان فاعل شناسایی بر همه ارتسامات واقعی که ناشی از تأثیر اشیا بر من است، تقدم دارد. این که متعلقات حواس فقط مطابق این صورت می تواند به شهود درآید، امری است که من می توانم آن را مقدم بر تجربه بدانم. [پرنویسی از اصل است].

پوانکاره به این پرسش که کدام هندسه درست است، پاسخی قرارداد گرایانه می دهد:

اگر هندسه دانشی تجربی بود، نمی توانست دانشی دقیق باشد و پیوسته دستخوش تجدید نظر می بود ... بنابر این، بنداشتهای هندسی نه شهودهای ترکیبی هستند و نه حقایق تجربی، بلکه قرارداد هستند. تنها انتخاب ما از میان همه قراردادهای ممکن به وسیله حقایق تجربی رهبری می شود. ولی انتخاب ما آزاد است و فقط به لزوم اجتناب از هر گونه تناقض محدود می شود. بنابر این، این اصول اند که می توانند دقیقاً درست باقی بمانند، حتی اگر قوانین تجربی که موجب پذیرفته شدن آنها شده اند، تقریبی باشند. به عبارت دیگر، بنداشتهای هندسه(سخن از بنداشتهای حساب نیست) تنها عبارت اند تعاریف در لباس مبدل. پس در باره این پرسش که «آیا هندسه اقلیدسی درست است» چه باید اندیشید؟ [این پرسش] پرسشی بی معنی است. درست مثل ای که بپرسیم آیا دستگاه متری درست است و اوزان و مقیاسهای قدیم نادرست اند؟ ... هیچ هندسه ای نمی تواند درست تر از هندسه دیگر باشد، تنها ممکن است مناسبتر باشد.

اینشتین و اینفلد هم به چنین نظری گرایش دارند. آنها در انتهای گفتگویی خیالی بین فیزیکدان قدیمی (به نام «ق») که به فیزیک کلاسیک معتقد است و فیزیکدان جدید (به نام «ج») که به نظریه نسبیت قایل است، چنین می آورند:

ق. ولی همه مطالب نشان می دهند که جانشین ساختن چوب بست پیچیده ای که شما ناگزیر از آن هستید به جای ساختمان ساده هندسه اقلیدسی چقدر نامناسب است. آیا حقیقتاً این کار ضرورتی هم دارد؟

ج. به نظر من اگر خواسته باشیم که قوانین فیزیک ما به هر دستگاهی قابل انطباق باشد و دستگاه مختصات اسرار آمیز ماندی هم در کار نباشد، این کار ضرورت دارد. من اعتراف می کنم که ابزارهای ریاضی من پیچیده تر از مال شما است؛ ولی در عوض فرضهای فیزیکی من ساده تر و طبیعی تر هستند.

افسانه پنداری fictionalism یکی دیگر از نگرش های ناواقع گرا در فلسفه ریاضی است. بنابر این دیدگاه عالم صدق و کذب قضایای ریاضی عالمی نظیر عالم صدق و کذب قضیه «رستم اسفندیار را کشت» است. این جمله به معنای تحت الفظی اش کاذب است؛ اما در عالم افسانه ها صادق است. گروهی به ساختار نحوی ریاضی را مخدوش می دانند. برخی حقیقت ریاضی را به طور مطلق دور از دسترس معرفت بشری می دانند و آرای دیگر.

به هر حال، واقع گرای ریاضی باید پاسخ مناسبی برای سؤالات زیر (و احتمالاً سؤالات دیگری مانند آنها) داشته باشد (اگر چه نیافتن این پاسخ ها به خودی خود مؤید هیچ قسمی از ناواقع گرایی نیست):

١ـ ظرف وجودی اعیان ریاضی کجا است؟

٢ـ معرفت ما به این اعیان چگونه حاصل می شود؟

٣ـ نحوه دلالت گزاره های ریاضی بر اعیان ریاضی به چه نحوی است؟

٤ـ در هندسه وجود هندسه های رقیب ناسازگار که از حیث منطقی هم ارزند، چگونه توجیه می شود؟

۲.۵. سنخ شناسی گزاره های ریاضی

گزاره ها به لحاظ صورت منطقی به دو گونه تقسیم می شوند: حملی و شرطی. قضایای حملی خود به لحاظ های مختلف به گونه هایی چند تقسیم می شوند: به لحاظ جهت،به لحاظ موضوع، به لحاظ محمول و به لحاظ رابطه. خود تقسیم به لحاظ موضوع دو قسم است: تقسیم به لحاظ تشخّص و عدم تشخص موضوع و تقسیم به لحاظ کیفیت وجود موضوع.

از لحاظ جهت، حتی در غرب نیز کمتر کسی در ضروری بودن گزاره های ریاضی تردید کرده است. اما برخی سخنان آنان در این مقام جالب است، از جمله این سخن گودل که:

شهود هندسی، اگر دقیق بگوییم، شهود ریاضی نیست؛ بلکه شهود فیزیکی پیش از تجربه a priori physical intuition است. شهود فضای اقلیدسی ما، در جنبه ریاضی اش کاملاً صحیح است، یعنی، به درستی معرف ساختاری است که در عالم اشیای ریاضی وجود دارد. حتی از لحاظ فیزیکی درست است، ولی در مقیاس کوچک.

اینشتین نیز می گوید:

تا آن جا که قضایای ریاضی گویای واقعیت هستند، محرز نیستند و تا ان جا که محرزند، گویای واقعیت نیستند.

البته در تقسیمات جزیی تر ضروری به نظر می رسد که از دید فلاسفه قایل به ضرورت این گزاره ها، از گونه ضرورت ذاتی باشد. اگر چه در حساب این سخن به سادگی قابل خدشه نیست، اما در هندسه این سخن به سادگی پذیرفتنی نیست؛ چنان که گودل و اینشتین نیز در آن تردید داشتند.

به لحاظ کیفیت وجود موضوع، از بیان فلاسفه اسلامی چنین بر می آید که آنان این گزاره ها را حقیقیه می دانستند. اما من از فلاسفه غرب، بیان صریحی در این باره ندیدم؛ هر چند ضرورت مد نظر آنان نیز احتمالاً با حقیقیه بودن ملازم باشد. از لحاظ تشخص و عدم تشخص موضوع، بنابر نظر منطق دانان مسلمان، قضایای علوم، همه، قضایای محصوره اند. و به همین طریق تقسیمات جزیی تر درباره گزاره های حملی ریاضی باید بررسی شود.

گزاره های شرطی نیز به دو قسم اصلی تقسیم می شوند: متصله و منفصله. از دید منطق دانان مسلمان، قضیه متصله دو قسم است: اتفاقیه و لزومیه. گزاره های شرطی متصله در علوم، از جمله علم ریاضی، از آن حیث که گزاره علمی اند، گزاره لزومیه اند. قضیه منفصله نیز به دو قسم عنادیه و اتفاقیه تقسیم می شوند که تنها قسم عنادیه در علوم به کار می رود. قضایای شرطی از حیث سور و جهت نیز به اقسامی تقسیم می شوند که بررسی آنها در سنخ شناسی گزاره های ریاضی در جای خود به تفصیل لازم است.

۲.۶. منابع معرفت ریاضی

این مسئله برای مکاتب واقع گرای ریاضی مطرح است؛ چرا که در مکاتب ناواقع گرا ریاضیات اساساً معرفت شمرده نمی شود. در السنه چنان مشهور است که فلاسفه اسلامی ریاضی را از معقولات می شمردند. من چندان با تاریخ فلسفه آشنایی ندارم، ولی ظاهراً آغاز این قول (لااقل نفوذ آن) از ترتیبی است که فارابی در احصاء العلوم برای علوم پیشنهاد داده است. این قول با مشکل خاصی برخورد نداشت و بلکه در دوران معاصر که معقول ثانی فلسفی بودن همه مفاهیم کمّی، علاوه بر وحدت و کثرت، مطرح است، این قول تأیید معرفت شناختی خوبی هم یافته است؛ زیرا مدرک این معقولات، خودِ عقل، بی واسطه حس است. به نظر می رسد این قول درباره علم حساب با مشکلی خاص روبرو نباشد. اما درباره هندسه چنین نیست. امروزه بسیار سخت می توان از این قول دفاع کرد که ترجیح یکی از هندسه ها بر هندسه های دیگر، یک ترجیح عقلی است؛ در حالی که دفاع از ادعای

ترجیح تجربی یکی از آنها بر باقی چندان سخت نیست. دو گفتار یاد شده از گودل و اینشتین نیز به همین نکته اشاره داشتند. البته بنا بر قول مشهور ـ که البته قول ضعیفی نیز نیست ـ کمّ یک مقوله ماهوی است و از آن جا که ابزار انتزاع این گونه مفاهیم حس است، تجربی دانستن این بخش از ریاضیات می تواند توجیه داشته باشد.

برخی از فلاسفه غرب نیز از شهود ریاضی سخن گفته اند. گودل می گوید:

من دلیلی نمی بینم که چرا باید به این گونه ادراک، یعنی به شهود ریاضی، کمتر از ادراک حسی عقیده داشته باشیم؛ آن شهودی که ما را وامی دارد تا نظریه های فیزیکی را بنا کنیم و انتظار داشته باشیم که ادراکات حسی آتی با آنها سازگاری نشان دهند؛ و به علاوه، بر این باور باشیم که سؤالی که اکنون نمی توان به آن پاسخ داد، معنایی دارد و ممکن است در آتیه بتوان پاسخی برای آن یافت.

ژاک هادامار نیز می گوید:

همان گونه که ذوق ادبی یا هنری وجود دارد، ذوق علمی هم وجود دارد.... [این] حس زیبایی می تواند در باب ثمربخش بودن نتیجه آتی ـ که اگر سخن دقیق بگوییم، اکثر اوقات قبلاً چیزی درباره آن نمی دانیم ـ به ما کمک کند و من به جز آن چیز دیگری نمی بینم که به ما امکان پیش بینی بدهد ...بی آن که چیز دیگری بدانیم، حس می کنیم که این راه بررسی، ارزش دنبال کردن دارد. هر کسی آزاد است که آن را حس زیبایی بنامد یا ننامد. بی شک روش فکری هندسه دانان یونانی هنگامی که به پژوهش در بیضی پرداختند، از این گونه بوده است؛ زیرا هیچ راه قابل تصور دیگری وجود نداشته است.

هاینریش هرتز، کاشف امواج رادیو، می گوید:

آدمی نمی تواند از این احساس بگریزد که: دستورهای ریاضی وجودی مستقل از ما دارند، بینشی خاص خود دارند، عاقل تر از ما و حتی از کاشفین خود هستند. و ما بیشتر از آن چه در اصل در درون آنها نهاده شده است، از آنها چیز دریافت می کنیم.

البته مفهوم شهود ریاضی هم چون تجربه دینی مفهومی مبهم است. اما، به هر حال، به کارگیری چنین مفهومی نشان دهنده یک نکته است: این که ریاضیدان احکام ریاضی را ناظر به واقع می یابد و در پی منبع معرفت آن است.

۲.۷. روش شناسی علم ریاضی

ریاضی در قرن بیستم به شکل عجیبی به روش منطقی و اصل موضوعی عرضه شد. در اینجا برای نمونه ای از طرح اصول موضوعی نظریه اعداد طبیعی (اصول پئانو) را می آورم:

۱ـ مجموعه اعداد طبیعی ـ با علامت اختصاری N مجموعه ای حداقل با دو عضو n و m است که میان هر دو عضو متمایز آن رابطه تالی بودن تعریف شده است به گونه ای که یا m تالی n است یا n تالی m است.

۲) $0 \in N$ (۰ یک عدد طبیعی است).

۳) $\forall n: n \in N \Rightarrow n^+ \in N$ (تالی یک عدد طبیعی، عدد طبیعی است. n^+ به معنای تالی عدد n است).

۴) ۰ تالی هیچ عدد طبیعی نیست.

۵) $\forall n,m \in N: n \neq m \Rightarrow n^+ \neq m^+$ (دو عدد نامساوی، تالی مساوی ندارند).

۶) (اصل استقرای ریاضی) اگر P خاصیتی در اعداد طبیعی باشد و

الف) $P(0)$ و

ب) $\forall n \in N: P(n) \Rightarrow P(n^+)$ ، آنگاه:همه اعداد طبیعی این خاصیت را دارند.(اگر ۰ خاصیت P را داشته باشد و اگر عددی آن خاصیت را داشته باشد، تالی اش هم آن خاصیت را داشته باشد؛ آنگاه همه اعداد طبیعی آن خاصیت را دارند).

هر قضیه در باره اعداد طبیعی (برای نمونه قضیه به ظاهر کاملاً روشن l□(n,m□N: n□m□n<m□m<n۸ با همین اصول ششگانه ثابت می شود و هر تابعی در اعداد طبیعی (مانند f(n)=n۲) و هر عملی در آنها(مانند +) و هر رابطه ای در میان آنها (مانند >) در چارچوب این اصول تعریف می شود. باید بر اساس همین اصول ششگانه ثابت شود. دو اصل موضوع دوم و سوم با استقرای ریاضی همه اعداد طبیعی را تولید می کنند و سه اصل دیگر روابط میان این اعداد را تبیین می کنند.

این روش با دقتی که به نظر می رسد، دارد؛ آرزوی دیرین فلاسفه و منطق دانان بود. حتی این که فلاسفه گذشته مطالعه هندسه را به فلسفه آموزان تأکید می کردند؛ برای این بود که فلاسفه هندسه را یک نمونه عالی از کاربرد روش منطقی محسوب می کردند و در اوایل قرن بیستم هیلبرت تلاش زیادی برای توسعه آن داشت. اما این روش با مشکلی اساسی روبرو است.به نظر نمی رسد توان معرفتی بشر در چنین چارچوب تنگی محدود باشد؛ بلکه به سرعت از آن می گذرد و به پیش می رود. معرفت بشری تنها وابسته به روش های صوری منطقی نیست. تبیین منطقی این مشکل با قضیه مشهور گودل روشن شد و آن این که در چنین نظامی اولاً اثبات سازگاری منطقی ممکن نیست؛ ثانیاً همواره ممکن است قضیه ای از این نظام یافت شود که با این اصول موضوع اثبات ناپذیر باشد. میشل پولانی تعبیر جالبی از این روش دارد:

به شاخه ای از ریاضیات توجه می کنیم که بر پایه دستگاهی از اصول موضوع استوار شده است که به خودی خود بدیهی به نظر نمی رسند و در واقع نمی توان بر سازگاری آنها با یکدیگر وقوف یافت.به کار بردن حد اعلای هوش و حداکثر دقت برای اثبات قضایای منطق یا ریاضیات، در حالی که مقدمات این استنتاج ها به خوشی پذیرفته شده اند، بی آنکه اساسی برای این پذیرفتن باشد؛ روی هم رفته ممکن است مضحک و عبث جلوه کند. آدمی را به یاد دلقکی می اندازد که با وقار و تأنی دو ستون را در وسط صحنه کار می گذارد، دری را بین آنها نصب می کند، دسته کلید بزرگی را از جیب بیرون می آورد، و کلید آن در را با زحمت زیاد پیدا و آن را باز می کند، سپس از در داخل می شود و آن را با دقت دوباره می بندد؛ در حالی که میدان دو طرف پایه ها باز است و او می تواند دور بزند و به آن طرف برود،بی آنکه به مانعی بربخورد.

فلاسفه اسلامی روش علم ریاضی را برهانی می دانند. تعریف روش برهانی نزد منطق دانان مسلمان یک تعریف صوری نیست، اگر چه به صورت نیز نظر دارد. در تعریف این منطق دانان در تعریف برهان علاوه بر صورت، ماده نیز لحاظ می شود. ابن سینا برهان را به «قیاس مؤتلف یقینی» تعریف کرده است و تأکید می کند که منظور از یقینی، یقینی بودن مقدمات است، نه نتیجه؛ بلکه یقینی بودن نتیجه امری عارضی بوده و تابع یقینی بودن مقدمات است. به همین جهت است که مقدمات برهان به مواد «الواجب قبولها» محدود است که عبارت اند از: محسوسات، مجربات، متواترات، اولیات، حدسیات و فطریات. از طرف دیگر، برهان را به دو قسم تقسیم کرده اند: برهان انّی و برهان لمّی. ابن سینا و ملاصدرا هر دو برآنند که در ریاضیات برهان انی به کار می آید.

به نظر نمی رسد توجه به ماده در کنار صورت مشکل یاد شده را حل نماید؛ اگر چه برهان گودل ناظر به این روش نیست. به هر حال، محدود کردن صورت به روش قیاس منطقی، محدود کردن توان معرفت بشری است. علاوه بر این لازم است پیروان این روش برهانی برای سازگاری درونی ریاضیات حاصل از این روش ارایه دهند یا راهکاری برای رسیدن به سازگاری داشته باشند. (بر فرض این که در صورت سازگاری درونی، توجه به ماده سازگاری بیرونی را حاصل نماید).

در سالهای اخیر نظریه های دیگری چون نظریه لاکاتوشLacatos در باره روش ریاضی عرضه شده است، که در این مختصر از آنها صرف نظر می شود.

۳. ساختار علم ریاضی

۳.۱. موضوع علم ریاضی

موضوع علم در نگرشی به علم مطرح است که علم را مجموعه ای از گزاره ها یا مسایل یا نظریه ها می داند که با وحدتی اعتباری گرد هم آمده اند؛ که نگرش عموم فلاسفه اسلامی و اصولیان است. نگرشی دیگر علم را یک فعالیت می داند، فعالیتی که عالم با توجه به نقشی که جامعه برای او تعریف کرده است، انجام می دهد. برای مثال در این نگرش، ریاضیات کاری است که ریاضیدان انجام می دهد. من در اینجا در پی نقد این دیدگاه نیستم و بنا بر دیدگاه معمول میان دانشمندان اسلامی موضوع علم ریاضی را بررسی می کنم. ابن سینا درباره موضوع علم ریاضی چنین می گوید:

موضوع علوم تعلیمی (علوم ریاضی) یا کم مجرد بالذات از ماده است یا آنچه ذوکم (دارای کمیت) است. مورد بحث در آن احوالی است که بر کمّ بما هو کم عارض می شود و در حدود آن نه نوع ماده و نه قوه حرکت اخذ می شود.

و در توضیحی تکمیلی می نویسد:

اما موضوع علم ریاضی یا مقداری مجرد در ذهن از ماده است یا مقداری است که در ذهن همراهی اش با ماده اخذ شده است یا عددی مجرد از ماده است یا عددی در ماده؛ و نیز بحث در آن متوجه به اثبات این نیست که آن مقدار مجرد از ماده است یا در ماده یا عددی مجرد یا در ماده است؛ بلکه موضوع بحث آن احوالی است که بر آن پس از وضعش عارض می شود.

بنابر این، همان گونه که صدر المتألهین توضیح می دهد، ریاضیات چهار شاخه خواهد داشت: حساب (عدد مجرد از ماده)، هندسه (مقدار مجرد از ماده)، موسیقی (عدد در ماده) و هیئت (مقدار در ماده). امروزه ذوکمّ یا به تعبیر دیگر، مقدار و عدد در ماده در فیزیک یا ریاضی فیزیک مطالعه می شود و ریاضیات به شاخه هایی منحصر می شود که قدما به آنها ریاضیات محضه می گفتند. ابن سینا در این که ریاضیات محضه علمی مستقل از فلسفه (یا علم اعلی) باشد، اشکالی را مطرح می کند:

می توان اشکال کرد که امور ریاضی محضه نیز که در حساب و هندسه بررسی می شوند، قبل از طبیعت اند و به ویژه عدد که اصلاً تعلق به طبیعت ندارد؛ چرا که در غیر طبیعت نیز یافت می شود. پس لازم می آید که علم حساب و هندسه علم ما قبل الطبیعه باشند.

ابن سینا برای پاسخ به این اشکال آن را به دو سؤال تجزیه می کند و ابتدا در باره هندسه اشکال را چنین پاسخ می دهد:

اما هندسه که در آن خطوط و سطوح و اجسام بررسی می شوند؛ آشکار است که موضوع آن در قوام مفارق طبیعت نیست. چون اعراض لازمه طبیعت اند، اولی به آنند. آنچه که موضوعش مقدار مطلق است، مقدار مطلق در آن به گونه ای اخذ می شود که مستعد هر گونه نسبتی باشد و این مقدار نه بما هو، بلکه از آن حیث که مقدار و عرض است، مبدأ برای طبیعیات و صورت است. در شرح ما بر منطقیات و طبیعیات فرق میان مقداری که هیولی را به نحو مطلق پذیرنده می کند و مقداری که کمّ است و اسم مقدار بر آنها به اشتراک واقع می شود. در این صورت، موضوع هندسه در حقیقت مقدار معلومی که مقوم جسم طبیعی باشد، نیست؛ بلکه مقداری است که بر خط و سطح و جسم مقول است و این همان مستعد برای نسب مختلفه است.

صدر المتألهین این پاسخ را بر این مبنا می بیند که به نظر شیخ الرئیس خط و سطح و جسم از حیث وجود به ماده تعلق دارند و تجرد آنها تنها به تجرد وهمی است. هم چنین در هندسه مقدار مطلقی که موضوع آن است؛ لازم است به گونه ای اخذ شود که مستعد عروض اشکال و نسب مقداری گوناگون از

مثلث و مربع و مکعب و پیوستگی و گسستگی و غیر آنها باشد و نیز این مقدار همان است که از باب کمّ قابل مساوات و لا مساوات و تقسیم پذیر و شکل پذیر از جهت ماده ای است که مستعد برای هر گونه نسبت و شکلی است؛ نه مقداری که به معنای بعد به نحو مطلق است و مقوم هیولی و بالذات مقدم بر آن است. در نقد آن می نویسد:

جعل اقسام اولیه مقدار یعنی خط و سطح و جسم با مقدار به یک جعل است و مقدار وجودی غیر از وجود یکی از آنها ندارد؛ همان گونه که جنس با انواع بسیط خود آن گونه است. پس چگونه شیخ مفارقت مقدار مطلق را در قوام از طبیعت را جایز می داند؛ ولی مفارقت خطوط و سطوح و اجسام را جایز نمی داند؛ در حالی که مقدار قوامی ندارد، جز به یکی از انواع بسیط خود. علاوه بر این، در واقع برای هر یک از این اقسام تحقّقی مفارق از طبیعت، بیرون از این جهان ممکن است چنان چه به زودی آن را برایت روشن می کنیم انشاءالله. پس آنچه در باره این اقسام می گوید بهتر است در باره مقدار نیز بگوید؛ که هر یک از خط و سطح و جسم که موضوع علوم هندسی قرار داده شده و هندسه دانان از احوال آن بحث می کنند، همان است که پذیرش نسبت های وضعی و اجزا و اقسام و جذر گیری و کعب گیری و امور دیگری مانند آنها که عروض آن بر چیزی از انواع مقدار جز بعد از تعلق آن به ماده طبیعی ممکن نیست، در شأن آن است.

ابن سینا شبهه را درباره عدد، موضوع علم حساب و این که علم حساب بخشی از مابعدالطبیعه باشد، قوی تر می یابد. اما در حل این شبهه چنین می کوشد: علم مابعدالطبیعه علمی است که از هر جهت مفارق از طبیعت است و غایت آن معرفت به خدای تعالی است. اما عدد هم به امور مفارق از ماده تعلق می گیرد و هم به امور طبیعی. موضوع علم حساب این مورد دوم است که وهم آن را مجرد از ماده لحاظ می کند. صدرالمتألهین از ابن سینا در این رأیش دفاع می کند؛ ولی از شیخ اشراق نقل می کند که وی از این که حساب جزء علم اعلی باشد، دفاع کرده است و او نظر شیخ اشراق را تضعیف می کند. بر این مبنا به نظر می رسد موضوع ریاضی را اگر کمّ، که مفهومی ماهوی است، اخذ کنیم، کفایت کند و وحدت و کثرت را که از مفاهیم فلسفی است، در موضوع ریاضی داخل ندانیم؛ زیرا به هر حال، تعلق این مفاهیم بر امور مادی تفاوتی با تعلق آنها بر امور مفارق از ماده، از آن حیث که موضوع علم حساب بتواند قرار گیرد، ندارد. البته چنین نظری نه بر اهل نظر دلچسب است و نه بر من.

نکته ای که در اینجا لازم است یادآور شوم؛ این است که موضوع حساب ماهیت عدد نیست. ابن سینا نیز به این نکته متوجه است.

پس حساب نه نظر در ذات عدد است و نه نظر در عوارض عدد از حیث که عدد مطلق است؛ بلکه در عوارض آن است از آن حیث که به نحوی شده که اشاره پذیر است و در این حال، آن یا مادی است یا وهمی انسانی است که به ماده مستند است. اما نظر در ذات عدد و در آنچه بر آن، از آن حیث که به ماده تعلق ندارد و به آن مستند نمی گردد، عارض می شود، داخل در علم اعلی است.

راسل هم به همین نکته چنین توجه می کند:

فرق میان فلسفه و ریاضیات از همین مسئله ماهیت عدد آشکار می شود. مبدأ هر دو معلومات معینی در باره اعداد است که بدیهی و بالعیان است. اما ریاضیات از این معلومات به عنوان مقدمه برای استنتاج قضایای مرکب و مفصل تر استفاده می کند؛ در حالی که مطلوب فلسفه این است که به وسیله تحلیل این معلومات، [معلومات] دیگری در ماورای آنها حاصل نماید که بسیط تر و اساسی تر و ذاتاً برای تقوم مقدمات علم ریاضیات مناسب تر باشد. سؤال عمده فلسفی در این باره این است که «عدد چیست؟»؛ در صورتی که از نظر ریاضیدان من حیث هی چنین سؤالی ضرورتاً پیش نمی آید، به شرط آن که از خواص اعداد به قدری که برای استنتاج لازم است، اطلاع داشته باشد.

دیدگاه ابن سینا نمونه ای از دیدگاه واقع گرا در باب موضوع علم ریاضی بود. اما در دیدگاه های غیر واقع گرا موضوع علم ریاضی این گونه بررسی نمی شود. برای نمونه دیدگاه صورت گرا نمی تواند موضوعی برای علم ریاضی تعیین کند. از راسل که از پیشگامان صورت گرایی در ریاضی است؛ نقل شده است:

ریاضیات علمی است که در آن نه می دانیم از چه سخن می گوییم و نه می دانیم آنچه می گوییم راست است یا نه.

هم چنین در نظر کانت که احکام ریاضیات را تألیفی پیشینی می داند، موضوع ریاضیات بخشی از ساختار ذهن است و تألیفی بودن احکام آن به این اعتبار است که از ساختار ذهن خبر می دهد.

در ریاضیات امروز هندسه کاملاً به جبر تحویل یافته است. این تحویل هم به جهت نگرش فلسفی است و هم دلایل ریاضی دارد. از حیث فلسفی، صورت گرایی مبنای چنین روندی قرار گرفته است؛ زیرا بر این مبنا واژه ها از معنا تهی اند و اگر دو نظام اصل موضوعی صورت یکسانی داشته باشند، در واقع یک نظام به شمار می آیند. از حیث ریاضی ورود دستگاه مختصات به هندسه راهگشای تحویل هندسه به جبر شد . اگر چه جبر همان حساب نیست؛ ولی شاخه ای از ریاضیات است که از حساب مشتق شده است. مشکل دیگر در تحدید موضوع ریاضی وارد شدن مباحثی از قبیل نظریه مجموعه ها ، نظریه اعداد مختلط، ماتریسها،تانسورها، فضاهای چند بعدی و چندتایی های مرتب به سختی در موضوع کمّ و مقدار و عدد جای می گیرند. به هر حال، این موضوع نیازمند بررسی جدی است.

۳.۲. مسایل علم ریاضی

بنابر مشهور در میان فلاسفه و اصولیان، مسایل علوم حقیقی عوارض ذاتیه موضوع آن علم است. علم ریاضی، بنابر دیدگاه سنتی، دارای دو موضوع است: مقدار و عدد. عوارض ذاتیه مقدار در این نگرش اموری از قبیل طول، مساحت، حجم و امور متعلّق به آنها است. عوارض ذاتیه عدد نیز اموری از قبیل شمارش، جمع، ضرب و روابط ترتیبی و چیزهای دیگری از این قبیل است. با توجه به گسترش معنای عدد در ریاضیات امروز شاید انتظار برود که مسایل از این مقدار بسیار فراتر روند. اما مسایل اصلی چندان تفاوت نمی کنند و تنها تعمیمی در تعریف جمع و ضرب و روابط ترتیبی لازم می آید. هم چنین، کمّ متصل، در فیزیک (یا ریاضیات کاربردی) تنها به طول و سطح و حجم منحصر نمی شود و کمیت امور بسیاری از قبیل جرم، نیرو و انرژی کمّ متصل است. کمّ منفصل نیز تنها برای شمارش نیست و کمیت امور بسیاری از قبیل بار الکتریکی، شدت نور، شدت جریان الکتریکی کمّ متصل است.

شاید بهترین مفهوم برای تبیین موضوع دوم ریاضی مفهوم «فضا» باشد که البته از مفهوم طبیعی فضا بسیار فراتر است. بسیاری از مسایل جدید ریاضی مانند ماتریسها و تانسورها و چندتایی های مرتب از عوارض ذاتیه این موضوع اند. برای مثال یک ماتریس $n \times m$ عملگر تبدیل از فضای n بعدی به فضای m بعدی است و nتایی های مرتب نشان دهنده نقاط فضای n بعدی است.

۳.۳. شاخه های اصلی علم ریاضی

قبلاً آمد که گذشتگان چهار شاخه برای ریاضیات می شمردند: حساب و هندسه و هیئت و موسیقی و نیز به دو شاخه اول ریاضیات محضه می گفتند. هنوز حساب (به اصطلاح امروزین، تئوری اعداد) و هندسه دو شاخه اصلی ریاضیات به شمار می آیند. اما شاخه های دیگری همچون آنالیز اعداد حقیقی (در حالت کلی تر، آنالیز اعداد مختلط) و جبر نیز از شاخه های اصلی و هم ارز آن دو به شمار می روند.

۳.٤. تعریف علم ریاضی

٣.٥. مبادی علم ریاضی

٣.٥.١. مفاهیم پایه علم ریاضی

منظور از مفاهیم پایه یک علم، مفاهیمی اند که در شکل گیری آن علم و نیز فهم مسایل و نظریه های آن علم نقش اساسی دارند و در صورت عدم فهم این مفاهیم، متعلم از مسایل و نظریات آن علم چیزی حاصل نخواهد کرد. در ریاضیات قدیم دو مفهوم پایه دیده می شود: عدد و کمّ. به اعتباری دیگر دو مفهوم کمّ منفصل و کمّ متصل. در ریاضیات امروز مفهوم مجموعه، عدد، متغیر، فضا و مفاهیم دیگری نیز از مفاهیم پایه ریاضی جدید به شمار می روند. شناخت درست ریاضیات جدید بستگی به فهم درست این مفاهیم و روابط معنایی میان آنها دارد. به نظر می رسد که دو امر در پایه قرار گرفتن یک مفهوم برای ریاضیات مؤثر باشند: مبانی فلسفی و پیشرفت ریاضیات.

٣.٥.٢. پیش فرضهای علم ریاضی

پیش فرض غیر از اصول موضوعه و اصول متعارفه است. پیش فرضهای یک علم گزاره هایی اند که در تعریف علم و معقولیت اعتبار آن به عنوان یک علم مقدمه باشند؛ در حالی که اصول موضوعه و اصول متعارفه در نظریه های درون یک علم مقدمه قرار می گیرند. به حسب اختلاف در مبانی فلسفی پیش فرضهای عالمان علوم تفاوت پیدا می کند و به همین اعتبار پیش فرضهای ریاضیدانان نیز متفاوت می شود. در مبنای فلسفی واقع گرا دو پیش فرض اساسی ریاضیدان این است که گزاره های ریاضی معنادار هستند و این که عالم خارج ویژگیهای کمّی و عددی دارد که در این گزاره ها بازنموده می شود. در ریاضیات جدید، اگر نظریه مجموعه ها را جزء ریاضی به شمار نیاوریم، این نظریه نیز یک پیش فرض اساسی است. پیش فرض دیگری که می توان تعریف کرد، پیش فرض مربوط به منشأ انتزاع مفاهیم ریاضی است. در ریاضیات جدید که از آرای فلسفی فرگه، راسل و وایتهد بسیار متأثر است، تعریف عدد و همه مفاهیم کلیدی ریاضی بر اساس نظریه مجموعه ها یک پیش فرض مهم است و در صورتی که بخواهیم این مبانی فلسفی را اصلاح کنیم، تعریف دوباره این مفاهیم ضرورت اساسی دارد و در این صورت گزاره هایی از نظام فلسفی پیش□رض ما خواهد بود. پیش فرض دیگر ریاضیات، به تعریف نیازهایی می پردازد که بشر را به تدوین این علم وامی دارد. این نیازها را می توان به نیازهای معرفتی (فلسفی) و نیازهای اجتماعی (کارکردی) تقسیم کرد. این نیازها هستند که مسایل را برای عالمان تعریف می کنند و جهت پیشرفت علم را نیز معین می کنند. نیازهای معرفتی حتی در محتوای علم نیز اثر دارند و این نحوه تأثیر با واقع گرایی می تواند کاملاً سازگار باشد. به نظر می رسد این قسم نیاز به ریاضیات از سنخ همان چیزی باشد که ابن سینا در تعریف غایت مطالعات ریاضی در فلسفه آورده است:

غرض نهایی از این علم [مابعد الطبیعه] معرفت تدبیر باری تعالی و معرفت ملائکه روحانی و طبقات آنها و معرفت نظام ترتیب افلاک است و این ممکن نیست مگر با علم هیئت و علم هیئت جز با علم حساب و هندسه [ریاضیات محضه] میسر نمی شود. [کروشه ها از من است.]

---

٤. مسایل فلسفی در حاشیه مسایل ریاضی

٤.١. بی نهایت کوچک ها

بی نهایت کوچک در آنالیز اعداد حقیقی چنین تعریف می شود: +□ℝ< (+< مجموعه اعداد حقیقی مثبت است(یک بی نهایت کوچک است، اگر به ازای هر +□□ℝ<مفروض داشته باشیم :□<□.□به عبارت ساده تر:□ یک عدد حقیقی بزرگتر از صفر است به گونه ای که هر عدد حقیقی مثبتی مانند□ را

در نظر بگیریم،□ از آن کوچکتر باشد. بنابر این، بی نهایت کوچک یک مقدار مبهم است، نه مقداری معین.مفهوم بی نهایت کوچک مبنای تعریف حد در نظریه توابع است. حد چنین تعریف می شود:

فرض کنید تابع f برای مقدارهای نزدیک x نزدیک به a معین باشد (الزامی نیست، ولی ممکن است که قلمرو تابع شامل a نیز باشد) می گوییم: L حد تابع f(x) است وقتی x به سمت a میل کند و مینویسیم:

$L = \lim_{x \to a} f(x)$

هر گاه به ازای هر ۰ <□ یک همسایگی محذوف a که آن را N می نامیم، وجود داشته باشد، به طوری که برای هر x متعلق به N و Df :

$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

دو مفهوم بسیار مهم و کاربردی مشتق و انتگرال در آنالیز از فروع این تعریف می باشند. نکته ای که در باره بی نهایت کوچک تأمل پذیر است، این است که بی نهایت کوچک بنا بر تعریف صفر نیست، اما در عمل باید خواص صفر را داشته باشد. برای مثال، وقتی می گوییم:

$\int x^2 dx = 1$

معنای هندسی آن این است که مساحت میان منحنی y=x۲ و محور xها در فاصله x=۰ و x=۱ برابر ۱ است. در عمل انتگرال گیری، این مساحت به صورت مستطیل هایی به طول x۲ و عرض بی نهایت کوچک dx فرض می شود (که در نتیجه تعداد مستطیل ها بی نهایت بزرگ می شود). اگر تعداد مستطیل ها شمارش پذیر و عرض آنها مقداری مثبت باشد، مجموع مساحت آنها دقیقاً ۱ نمی شود؛ ولی با افزایش تعداد مستطیل ها و کاهش عرض آنها این مقدار به سمت ۱ میل می کند. اما عمل انتگرال گیری این ادعا را در عمل دارد که اگر تعداد مستطیل ها بی نهایت و عرض آنها صفر شود، این مقدار دقیقاً یک می شود. سؤال فلسفی این است که آیا این ادعا هم از حوزه نظریه اعداد حقیقی بیرون نیست؟ و آیا پرش از احکام متناهی به نامتناهی نیست؟ چنان که در همین مثال دیدیم چنین مشکلاتی در مورد بی نهایت بزرگ ها نیز مطرح است.

٤.٢. اعداد موهومی و مختلط

اعداد موهومی یکی از عجایب دنیای ریاضی است. نه به ادراک حسی چنین چیزی درک می شود و نه به صور خیالی قابل تصور است. اعدادی اند که رابطه ترتیبی میان آنها وجود ندارد (یکی از دیگری کوچکتر یا بزرگتر نیست). شاید به نظر برسد که این صرفاً یک ابداع وهمی ریاضیدانان باشد که هیچ واقعیتی را بازنمون نیست. اما در این صورت، ورود گسترده این مفهوم به حوزه ریاضی فیزیک چگونه توجیه می شود؟ به نظر می رسد که بحث در ماهیت این قسم اعداد بحث فلسفی سخت، ولی جالب باشد.

٤.٣. هندسه های غیر اقلیدسی

هندسه های غیر اقلیدسی نیز با پژوهش های جالب فلسفی همراه هستند. برخی از این مسایل چنین اند: ماهیت توازی چیست؟ در تعریف دو خط موازی آمده است که دو خطی اند که تا بی نهایت همدیگر را قطع نکنند. اولاً از بی نهایت چگونه آگاهی پیدا می شود؟ ثانیاً دو خط موازی با دو خط مجانب (که در بی نهایت همدیگر را قطع می کنند) چه تفاوتی دارد؟ خط راست چیست؟ تعبیر فیزیکی خط راست چیست؟ هندسه واقعی عالم کدام است؟ و مسایلی دیگر از این قبیل.

٤.٤. موارد دیگر

ماهیت فضاهای n ـ بعدی، صفر، یک، نقطه، جبر بولی، بی نهایت ها و مسایل بسیاری از ریاضیات نیازمند تبیین فلسفی است.